LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

Le Ministre de l'Éducation nationale et
de l'Enfance et de la Jeunesse,

Vu le règlement grand-ducal du 24 octobre 2011 fixant les conditions d'admission au stage, le déroulement du stage et l'examen de fin de stage ouvrant l'accès aux fonctions de formateur d'adultes, notamment le chapitre Ier.- L'examen-concours d'admission au stage des fonctions de formateur d'adultes ;

Arrête

Article unique: Pour la fonction de formateur d'adultes en mathématiques, le concours de recrutement comporte les épreuves de classement suivantes:

Deux épreuves écrites:

a) La première épreuve, d'une durée de deux heures, porte sur un ou plusieurs thèmes du domaine de l'analyse et de la géométrie ; coefficient 2,

b) La deuxième épreuve, d'une durée d'une heure, porte sur un ou plusieurs thèmes du domaine de l'algèbre ou des probabilités ; coefficient 1

Une épreuve orale :

L'épreuve orale, d'une durée d'une heure pour la préparation et d'une demi-heure pour l'exposé oral, porte sur un thème tiré du domaine de l'analyse, de la géométrie, de l'algèbre ou des probabilités.

La langue à utiliser est le français. L'épreuve est dotée du coefficient 3.

Les thèmes mathématiques sur lesquels portent les épreuves écrites et l'épreuve orale sont des thèmes susceptibles de figurer au programme de l'enseignement secondaire.

Pendant les épreuves écrites et lors de la préparation de l'épreuve orale, les candidats sont autorisés à consulter les manuels de mathématiques prescrits par 'Horaires et Programmes'.

Luxembourg, le 28 février 2014

Le Ministre de l'Éducation nationale
de l'Enfance et de la Jeunesse,

29, rue Aldringen
L-2926 Luxembourg
Tél.: (+352) 247-85100
Fax: (+352) 247-85113
e-mail: info@men.lu
www.men.lu

<u>Première épreuve : ANALYSE ET GÉOMÉTRIE</u>

ANALYSE

1. **Limite et continuité d'une fonction**
   Enoncés usuels sur les limites.
   Extensions sur les limites
   Image d'un intervalle par une fonction continue, application à la résolution d'équations, racine $n^{ième}$ d'un réel.
   Prolongement par continuité.

2. **Dérivabilité**
   Nombre dérivé, interprétation géométrique de ce nombre. Fonction dérivée. Opérations algébriques. Dérivées successives. Dérivées d'une fonction composée, d'une fonction réciproque. Application réciproque d'une fonction dérivable strictement monotone. Existence, monotonie, continuité, dérivabilité. Application du calcul des dérivées.

3. **Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis**
   Enoncés usuels et applications.

4. **Etude des variations des fonctions numériques**
   Réduction de l'ensemble d'étude d'une fonction (parité, périodicité). Sens de variation, points remarquables, extrema, point d'inflexion. Branches paraboliques et asymptotes. Position de la courbe représentative d'une fonction par rapport aux asymptotes, tangentes et sécantes. Applications à la résolution d'équations et d'inéquations (méthode graphique).

5. **Fonctions logarithme népérien et exponentielle de base e, de base a (a > 0)**
   Définitions, propriétés et calculs. Exemples.
6. **Fonction puissance $x \to x^{\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)**
   Définitions, propriétés et calculs. Exemples.

7. **Fonctions cyclométriques**
   Définitions, propriétés et calculs. Exemples.

8. **Croissance comparée des fonctions logarithme, exponentielle et puissance au voisinage de + ∞**

9. **Primitives d'une fonction**
   Définitions et propriétés. Exemples

10. **Calculs d'intégrales**
    Changement de variable, intégration par parties.

11. **Applications du calcul intégral**
    Calcul d'aires. Calcul de volumes.

GÉOMETRIE PLANE

1. **Angles**
   Angles géométriques, angles orientés, angles au centre et angles inscrits dans un cercle

2. **Barycentres**

3. **Produit scalaire**
Définition, propriétés, orthogonalité de vecteurs, norme d'un vecteur, expression analytique dans une base orthonormée, distance d'un point à une droite, angles dans un triangle quelconque.

4. **Isométries et homothéties**
Définitions, propriétés, invariants, expressions analytiques, composées de transformations, image d'un ensemble de points, représentations complexes, cas d'isométrie de triangles, triangles semblables.

5. **Coniques**
Définitions, propriétés géométriques, formes réduites, tangentes, constructions.

6. **Lieux géométriques**

GÉOMETRIE DE L'ESPACE

7. **Droites, plans et sphères**
Définitions, positions relatives, équations cartésiennes et représentations paramétriques

8. **Produit scalaire**
Définition, propriétés, orthogonalité de vecteurs, norme d'un vecteur, expression analytique dans une base orthonormée, distance d'un point à une droite ou à un plan, distance entre deux droites, angle de deux vecteurs.

9. **Produit vectoriel, produit mixte**
Définitions, propriétés, expressions analytiques, applications.

Deuxième épreuve: ALGÈBRE ET PROBABILITÉS

1. **Dénombrements et probabilités**
Nombre des applications d'un ensemble fini dans un autre. Arrangements (sans répétition). Nombre des parties de cardinal donné d'un ensemble fini. Combinaisons. Formule du binôme. Probabilités dans le cas d'équiprobabilité sur un ensemble fini d'épreuves. Probabilités conditionnelles. Variables aléatoires. Loi de probabilité. Cas de la loi binomiale.

2. **Nombres complexes.**
Notation algébrique, trigonométrique, exponentielle. Racines $n^{\text{ièmes}}$, équations dans $\mathbb{C}$. Module, argument. Etudes des transformations du plan complexe de la forme
$z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c et d sont des nombres complexes.

3. **Suites.**
Définitions, notations, propriétés, opérations. Sens de variation. Convergence. Suites arithmétiques et géométriques.

4. **Trigonométrie**
Relations métriques dans un triangle quelconque, définitions des fonctions trigonométriques, formules fondamentales, équations et inéquations trigonométriques.

Exemples d'épreuves

LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN CONCOURS RECRUTEMENT FORMATEUR D'ADULTES

en enseignement théorique

PREMIÈRE ÉPREUVE ÉCRITE

SPÉCIALITE: Mathématiques DATE : 25.4.2022 DURÉE 2 heures

BRANCHE: **Analyse et géométrie**

Présentation propre et soignée exigée. Les calculs, réponses et étapes sont à justifier.

Exercice 1

(2+3 = 5 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes :

1) $\log_3(3^x+1) = -x-2+\log_3(4)$

2) $\log\left(2x-2\sqrt{1-x^2}\right) < 0$

Exercice 2

(1+0,5+1+0,5+3+1 = 7 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

On note $\mathcal{C}_f$ le graphe de f dans un repère orthonormé.

1) Dresser le tableau des variations de f. Indiquer les asymptotes et branches paraboliques éventuelles.

2) Soit m un paramètre réel. Préciser en fonction des valeurs de m le nombre des solutions de l'équation $f(x) = m$.

3) On considère la droite Δ d'équation $y = -x+2$.
Montrer qu'il existe un point unique $A \in \mathcal{C}_f$ en lequel la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à Δ.

LE COMMISSAIRE DU GOUVERNEMENT

Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t)\ dt$.

4) Étudier les variations de la fonction F.

5) Démontrer que si $t > 0$, alors $\dfrac{e^t}{t} > \dfrac{1}{t}$.

En déduire le signe de $\rho(x) = F(x) - \ln(x)$ sur $]0;+\infty[$.

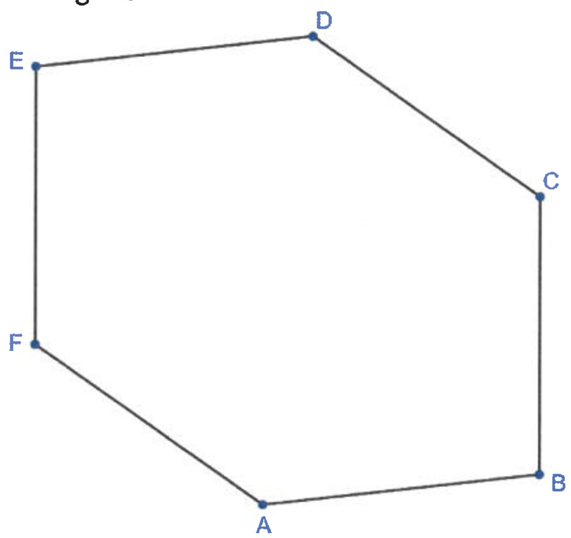
6) Quel est le comportement de F en $+\infty$ et en 0 ?

Exercice 3

(2+1+1+2+1+1 = 8 points)

On considère un hexagone $ABCDEF$ dans le plan dont les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$ et $[FA]$ ont même longueur a et tel que $[AB] \parallel [ED]$, $[BC] \parallel [FE]$, $[CD] \parallel [AF]$.

Voici un croquis de cet hexagone.



On sait de plus que $d([AB],[ED]) = 384$, $d([BC],[FE]) = 474$, $d([CD],[AF]) = 390$.

1) Introduire le point O de manière à décomposer l'hexagone en trois losanges $AOEF$, $AOCB$ et $OCDE$. Soient x, y et z les hauteurs respectives de ces losanges. Déterminer x, y et z.

2) Soient α, β et γ les angles aigus de ces losanges. Montrer que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

3) Montrer que $\sin\alpha = \frac{x}{a}$, $\sin\beta = \frac{y}{a}$ et $\sin\gamma = \frac{z}{a}$.

4) En déduire que $\cos\alpha = \frac{7}{25}$.

5) Calculer $\sin\alpha$ et déterminer la valeur de a.

6) Quelle est l'aire $\mathcal{A}$ de l'hexagone ?

LE COMMISSAIRE DU GOUVERNEMENT

LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN CONCOURS RECRUTEMENT
FORMATEUR D'ADULTES

en enseignement théorique

DEUXIÈME ÉPREUVE ÉCRITE

SPÉCIALITE: Mathématiques DATE : 27.4.2022 DURÉE 1 heure

BRANCHE: **Algèbre et probabilités**

Présentation propre et soignée exigée. Les calculs, réponses et étapes sont à justifier.

Exercice 1 (2+1 = 3 points)

Une compagnie aérienne a mené des études afin d'observer l'évolution du nombre de journaux distribués à ses passagers (en millions d'exemplaires) au bord de ses avions. Cette évolution peut être décrite par une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q > 0$ où u_n désigne le nombre de journaux distribués à ses passagers (en millions d'exemplaires) à bord pendant l'année $(1995 + n)$. On sait qu'en 2001, la compagnie a distribué 16 millions de journaux à ses passagers et qu'en 2004, elle a distribué 6,75 millions de journaux à ses passagers.

1) Déterminer la raison q et le terme initial de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (le dernier est à arrondir au centième). Justifier par des calculs.

2) Combien de journaux la compagnie aérienne va-t-elle avoir distribué au total de 1995 à 2020 (inclus) ? Arrondir au centième.

Exercice 2 (2+1 = 3 points)

Une autre compagnie aérienne s'est davantage intéressée au comportement du passager. Elle a constaté que la probabilité qu'un passager prenne un journal à bord de l'avion était de 0,3. De plus, parmi ceux qui ont pris un journal à bord, 45 % s'informent également à l'aide de sites d'actualité dès l'atterrissage.

LE COMMISSAIRE DU GOUVERNEMENT

De même, la probabilité qu'un passager ne prend pas de journal à bord et ne s'informe pas à l'aide de sites d'actualité après son atterrissage est de 0,14.

Notons les événements suivants :

J = « le passager prend un journal à bord de l'avion »

S = « le passager consulte des sites d'actualité dès l'atterrissage »

1) Calculer la probabilité que le passager ne consulte pas des sites d'actualité dès l'atterrissage.

2) Calculer la probabilité que le passager prenne un journal à bord ou consulte des sites d'actualité dès l'atterrissage.

Exercice 3 (1+1+2+4 = 8 points)

Les parties peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Dans le champ des complexes, soit A le point d'affixe $z_A = i$, B le point d'affixe $z_B = e^{\frac{-5\pi}{6}i}$ et D le point d'affixe $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Le point O est l'origine du repère orthonormé du plan complexe.

1) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r. Montrer que l'affixe de C est $z_c = e^{-\frac{\pi}{6}i}$, puis l'écrire sous forme algébrique.

2) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h. Montrer que l'affixe de E est $z_E = \sqrt{3}$, puis l'écrire sous forme exponentielle.

3) Déterminer la nature du triangle CDE et justifier dûment à l'aide de calculs.

Partie B

Résoudre dans $\mathbb{C}$ et donner les solutions sous forme algébrique :

$$z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0$$

Exercice 4 (2+2+2 = 6 points)

Les parties peuvent être traitées indépendamment et il n'a pas lieu d'effectuer les calculs à faire.

Partie A

D'un jeu de 32 cartes ordinaires, on tire successivement et sans remise 3 cartes.

Calculer la probabilité de l'événement suivant :

A = « Tirer exactement deux cœurs et exactement un As »

LE COMMISSAIRE DU GOUVERNEMENT

Partie B

D'un jeu de 52 cartes ordinaires, on tire simultanément 3 cartes.

Calculer la probabilité des événements suivants :

B = « Tirer 3 cartes de même valeur »

C = « Tirer au moins une figure »

Partie C

Un garage s'ouvre uniquement à l'aide d'un code à 5 chiffres. Le clavier pour taper ce code est conçu de la façon suivante :

- 5 touches rouges numérotées de 0 à 4
- 3 touches bleues numérotées de 5 à 7
- 2 touches vertes numérotées de 8 à 9

1) Calculer le nombre de codes différents qu'on peut créer à l'aide de ces touches.
2) Calculer le nombre de codes différents qu'on peut créer à l'aide de ces touches sachant qu'il faut choisir exactement 2 touches bleues et exactement 3 touches rouges et que les chiffres ne doivent pas se répéter. De plus, les chiffres de même couleur doivent rester regroupés.

LE COMMISSAIRE DU GOUVERNEMENT

Concours d'admission pour la fonction de formateur d'adultes

Mathématiques

Première épreuve écrite	**Branche :** *analyse et géométrie*
Date : 26 avril 2021	**Durée :** 2 heures

EXERCICE 1 *(6 points)*

A) Soit g la fonction définie par $g(x) = 2\ln^2(x) + 4x\ln(x) + 4\ln(x)$.

Étudier (domaine de définition, limites aux bornes du domaine de définition, dérivée, tableau des variations) la fonction g. De plus, montrer que g admet deux racines et donner pour l'une d'elles la valeur exacte et pour l'autre un encadrement à 0,1 près.

B) Soit f la fonction définie par $x \mapsto \begin{cases} \frac{2x}{x+1}\ln^2(x) & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

1) Étudier la continuité de f en 0.
2) Étudier et interpréter graphiquement la dérivabilité à droite de f en 0.
3) Étudier le comportement asymptotique de f.
4) Étudier les variations de f.

EXERCICE 2 *(2 points)*

Déterminer en fonction du paramètre réel $m > 0$ le nombre de solutions de l'équation $m^x = x$.

EXERCICE 3 *(3 points)*

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ de $Domf$ vers Imf.

1) Démontrer que la fonction f n'est pas bijective, mais que la fonction g, restriction de f sur $\mathbb{R}_+$ est une bijection.
2) Établir l'expression de g^{-1}.

EXERCICE 4 *(3 points)*

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ on considère la courbe

$$\mathcal{C} \equiv y = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{x^2}{3} + 2x + 6}$$

Identifier cette courbe et représenter $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé (unité 1 cm).

EXERCICE 5 *(6 points)*

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère les plans :

$$\mathcal{P}_m \ : \ x - my - 3z - 5 = 0 \quad (m \in \mathbb{R})$$
$$\mathcal{Q} \ : \ 2x - 6y - 8z - 6 = 0$$

1) Déterminer l'ensemble des points qui appartiennent à chacun des plans de la famille $\mathcal{P}_m$.

2) Montrer que pour toute valeur du paramètre m les plans $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants. Donner les éléments caractéristiques de leur droite d'intersection.

3) Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{R}$ contenant le point $B(4;5;-7)$ et perpendiculaire aux plans $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{Q}$.

4) Déterminer m tel que les plans $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{Q}$ soient perpendiculaires.

5) On considère la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 26$.

Établir une équation cartésienne du plan $\mathcal{T}$ tangent à cette sphère en $C(0;1;7)$.

6) Montrer que $\mathcal{Q} \cap \mathcal{T} = \emptyset$.

LE COMMISSAIRE DU GOUVERNEMENT

ÉDUCATION NATIONALE, ENFANCE ET JEUNESSE G.-D. DE LUXEMBOURG

Concours d'admission pour la fonction de formateur d'adultes

Mathématiques

Seconde épreuve écrite	**Branche :** *algèbre et probabilités*
Date : 28 avril 2021	**Durée :** 1 heure

Présentation propre et soignée exigée. Les calculs, réponses et étapes sont à justifier.

EXERCICE 1 *(2+2+2 = 6 points)*

Les trois parties sont indépendantes. Les résultats sont à noter sous forme de fraction irréductible.

Dans une urne il y a :

- 6 boules rouges (numérotées de 0 à 5)
- 5 boules bleues (numérotées de 0 à 4)
- 8 boules vertes (numérotées de 0 à 7)
- 6 boules jaunes (numérotées de 0 à 5)

Les boules sont toutes indiscernables au toucher.

1) On tire successivement et sans remise 4 boules de cette urne.
Calculer la probabilité des événements suivants :
C = « Tirer 2 boules rouges suivies de 2 boules bleues »
D = « Tirer 2 boules rouges et 2 boules bleues (dans n'importe quel ordre) »

2) On tire successivement 4 boules de l'urne. Après avoir tiré une boule, on la remet à nouveau dans l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :
U = « Tirer 4 boules qui portent le même numéro »
Z = « Tirer au moins une boule jaune » *(Donner le résultat décimal arrondi au millième.)*

3) Jean crée un jeu qui consiste à tirer une boule de l'urne.

- Si le numéro de la boule est impair, alors le joueur perd le montant en € qui est inscrit sur la boule tirée.
- Si le numéro de la boule est pair, alors le joueur gagne le montant en € qui est inscrit sur la boule tirée.

Pour jouer, Jean demande au joueur 0,20 € par partie pour jouer. Le jeu est-il favorable au joueur ? Justifier par des calculs.

LE COMMISSAIRE DU GOUVERNEMENT

EXERCICE 2 *(1+2+3 = 6 points)*

Dans le champ des complexes, on donne l'expression suivante :

$P(z) = z^3 + (-1 - 6i + \alpha)z^2 + (4 + 20i - 2\alpha + \alpha i)z + 34 + 12i - \alpha + 5\alpha i$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$

1) Vérifier que $-1 + i$ est une racine de P.
2) Noter P sous forme d'un produit de deux facteurs.
3) Supposant pour la suite que α vaut zéro, calculer les autres racines de P.

EXERCICE 3 *(2+3 = 5 points)*

Dans le champ des complexes, on considère la fonction f définie par $f(z) = \frac{3+z}{5-zi}$.

On suppose que toutes les conditions d'existence sont vérifiées.

1) Déterminer l'ensemble $E = \{z \in \mathbb{C} \,|\, f(z) \in \mathbb{R}_-^*\}$.
2) Représenter cet ensemble E à l'aide d'un croquis.

EXERCICE 4 *(1+2 = 3 points)*

Les deux parties suivantes sont indépendantes.

1) Résoudre : $2\sin^2(3x) - 5\cos(3x) - 4 = 0$

2) Démontrer :

$$\frac{\sin(2x) + \sin(5x) - \sin(x)}{\cos(2x) + \cos(5x) + \cos(x)} = \tan(2x)$$

LE COMMISSAIRE DU GOUVERNEMENT

Formules trigonométriques

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \qquad \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \qquad \cos 3x = -3 \cos x + 4 \cos^3 x$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \tfrac{p+q}{2} \cos \tfrac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \tfrac{p-q}{2} \cos \tfrac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \tfrac{p+q}{2} \cos \tfrac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \tfrac{p+q}{2} \sin \tfrac{p-q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin x \sin y = \tfrac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

LE COMMISSAIRE DU GOUVERNEMENT