Concours de recrutement en mathématiques
Épreuve d'analyse

Mardi, le 30 janvier 2018
de 15h00 à 18h00

Question 1 (6 points)

(a) Résolvez l'équation $x^{|x-1|} = \sqrt{x}^{\frac{1}{x}}$

(b) Calculez l'intégrale $\displaystyle\int_0^{-1+e^{\frac{\pi}{2}}} (1+x)^2 \sin\left[\ln(1+x)\right] \mathrm{d}x$

(c) On donne les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = e^{2x}$.
Tracez les courbes représentatives C_f et C_g des fonctions f et g. (RON; unité 1cm)
Déterminez le volume du solide obtenu en faisant tourner la surface fermée délimitée par C_f, C_g et la droite d d'équation $x = 1$ autour de l'axe (Oy).

Question 2 (7 points)

On donne la famille de fonctions f_a définies sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = (x-1)\sqrt[3]{ax+1}$ où a est un paramètre réel.

(a) Etudiez la dérivabilité de f_a et précisez le domaine de dérivabilité en fonction de la valeur de a.
Pour les valeurs éventuelles en lesquelles f_a n'est pas dérivable, donnez l'interprétation graphique des résultats trouvés.

(b) Pour $a = -4$, calculez l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de f_a, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Question 3 (7 points)

$\boxed{\text{A}}$ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{0; 2\}$ par $g(x) = x\ln|x| - (x-2)\ln|x-2|$.
Etudiez les variations de la fonction g et déduisez-en le signe de $g(x)$.

$\boxed{\text{B}}$ Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln|x-2|}{\ln|x|}$.

(a) Déterminez le domaine de définition de f. Calculez les limites aux bornes du domaine et précisez les équations des asymptotes éventuelles.

(b) Déterminez la dérivée de f et établissez le tableau de variation de f.

(c) Esquissez la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (unité: 1 cm).

Concours de recrutement en mathématiques
Épreuve de géométrie
Mardi, le 6 février 2018
15h00-18h00

I.

On considère un cercle Γ de centre O et de rayon r dans le plan.
Soit [AB] un diamètre de ce cercle.
Pour tout point M du plan, on définit $P_\Gamma(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

a) Montrer que pour tout point M du plan : $P_\Gamma(M) = MO^2 - r^2$
b) En déduire le lien entre le signe de $P_\Gamma(M)$ et la position du point M par rapport au cercle Γ.
c) Déterminer en fonction des valeurs du paramètre réel k l'ensemble des points du plan M tels que $P_\Gamma(M) = k$.
d) Soit Γ' un cercle de centre O' et de rayon r' avec $r \neq r' et\ O \neq O'$. I est le milieu de [O O'].
Démontrer l'ensemble des points M tels que $P_\Gamma(M) = P_{\Gamma'}(M)$ est une droite. On pourra d'abord montrer que $\left(\overrightarrow{MO}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MO'}\right)^2 = 2\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{IM}$

(7 points)

II.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soient d et Δ les droites passant respectivement par les points A et B et dont des vecteurs directeurs respectifs sont $\vec{u}\ et\ \vec{v}$

a) Démontrer que les droites non parallèles d et Δ sont sécantes si et seulement si $det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 0$.
b) m étant un paramètre réel, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m-1 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} 2-m \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, A(2,1,1) et B(-1,1,-1).
   i. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les deux droites sont parallèles.
   ii. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les deux droites sont sécantes

(6 points)

III.

On considère le triangle équilatéral ABC inscrit dans le cercle Γ dans le plan orienté de sorte que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv +\frac{\pi}{3}\ \ (2\pi)$.
Soit M un point de Γ, distinct de A et de C, situé sur l'arc AC, qui ne comprend pas le point B.
Soit I le point de [MB] tel que IM=MA.

a) Faire une figure.
b) Montrer que le triangle IAM est équilatéral.
c) Soit r la rotation de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{3}$.
Déterminer les images de A, de B et de I par r et en déduire que MA+MC=MB.

(4 points)

IV.

Soient A et B 2 points distincts du plan et α un réel strictement positif. I est le barycentre de $A(1)\ et\ B(\alpha)$ et J celui de $A(1)\ et\ B(-\alpha)$.
Déterminer l'ensemble des points M tels que $\frac{MA}{MB} = \alpha$ en fonction des valeurs de α.

(3 points)

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE D'ALGÈBRE-PROBABILITÉS

jeudi, le 8 février 2018

15H00 – 18H00

I. 1) Un ministre est contacté par téléphone et dispose d'un répondeur.
Quand il est présent, il branche son répondeur une fois sur trois.
Quand il est absent, il branche son répondeur systématiquement.
Quand un citoyen téléphone, il a 4 chances sur 5 d'obtenir le répondeur.

a) Calculer la probabilité que le ministre soit dans son bureau à un moment quelconque de la journée.

b) Un citoyen téléphone et tombe sur le répondeur. Calculer la probabilité que le ministre soit présent.

2) Une urne contient 6 boules rouges et n boules bleues, $n \in \mathbb{N}$. On tire simultanément deux boules de l'urne.
Combien doit-on avoir de boules bleues dans l'urne pour que la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes soit supérieure à 0,5 ?

(6 points)

II. Soit l'équation $m\cos x - (m+1)\sin x = m$, où m est un paramètre réel.
Déterminer la/les valeur(s) du paramètre réel m tel que l'équation admette deux solutions dont la différence est $\frac{\pi}{2}$.

(4 points)

III. Dans le plan complexe on note f l'application qui à tout point M d'affixe z non nulle, noté M(z), associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{\bar{z}}$.

1) Montrer que les points O, M et M' sont alignés.
2) Déterminer l'ensemble Γ des points invariants par f.
3) Soient A(−1), B(i), E le milieu du segment [AB] et E' l'image de E par f.
Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB] et montrer que E' est un point de ce cercle.
4) Pour tout point M d'affixe z de la droite (AB) on se propose de construire son image M' d'affixe z' par f.
   a) Déterminer une équation de la droite (AB).
   b) Poser $k = OM^2$, $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec x, y, x' et y' réels.
   Exprimer k en fonction de x et montrer que M' $\in \mathcal{C}$.
   c) Donner alors une construction géométrique du point M' à partir du point M.

(6 points)

IV. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 1$
2) La suite (v_n) est définie par $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$.
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser sa limite.
3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

(4 points)

Epreuve orale 2018

Concours de Recrutement en mathématiques

I. Introduire la dérivabilité d'une fonction f en un point d'abscisse a.
Préciser les différents cas possibles et interpréter graphiquement.

II.

1. Soit (P) le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1. Soient les points A(1;0) et A'(-1;0).

   Par tout point H du segment $[A\,A']$, distinct de A et de A', on mène la perpendiculaire Δ à la droite (AA'). La droite Δ coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en M et M'. Soit x l'abscisse du point H.

   Calculer l'aire du triangle (AMM') en fonction de x.

2. Soit f la fonction numérique définie sur $[-1; 1]$ par:
   $f(x) = (1-x)\cdot\sqrt{1-x^2}$.

   Soit (C_f) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal où l'unité de longueur est 4 cm.

   a) Etudier la dérivabilité de f en -1 et en +1.
   b) En déduire les demi-tangentes à la courbe (C_f) aux points d'abscisses -1 et +1.
   c) Dresser le tableau de variation de f; on y précisera f(0).
   d) Tracer la courbe (C_f).

3. Démontrer que le triangle (AMM') d'aire maximale est équilatéral.

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE ORALE
2018

1) Définir les notions suivantes : fonction, application, injection, surjection, bijection.

2) On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x-2}{4x+1}$.

   a) Déterminer des ensembles A et B « aussi grands que possible » tels que la restriction de f à l'ensemble A, notée $\bar{f}$, soit une bijection de A vers B.

   b) Déterminer une expression de la réciproque $\bar{f}^{-1}$ de la fonction $\bar{f}$.

3) On donne la fonction g définie par $g(x) = x^2 - x - 1$.

   a) Déterminer des ensembles A et B « aussi grands que possible » tels que la restriction de g à l'ensemble A, notée $\bar{g}$, soit une bijection de A vers B.

   b) Déterminer une expression de la réciproque $\bar{g}^{-1}$ de la fonction $\bar{g}$.

   c) Faire la représentation graphique des fonctions $\bar{g}$ et $\bar{g}^{-1}$.

4) On donne la fonction h définie par $h(x) = 3 - \sqrt{x^2 - 4}$.

   a) Déterminer des ensembles A et B « aussi grands que possible » tels que la restriction de h à l'ensemble A, notée $\bar{h}$, soit une bijection de A vers B.

   b) Déterminer une expression de la réciproque $\bar{h}^{-1}$ de la fonction $\bar{h}$.

   c) Compléter : $\forall x \in \cdots : \bar{h} \circ \bar{h}^{-1}(x) = \cdots$

   $\forall x \in \cdots : \bar{h}^{-1} \circ \bar{h}(x) = \cdots$