LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

Direction générale des ressources humaines et des affaires juridiques
Service ressources humaines – AE/PM/ED
concours.epp@men.lu

Le Ministre de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse,

Vu la loi modifiée du 10 juin 1980 portant planification des besoins en personnel enseignant de l'enseignement secondaire, notamment l'article 6 ;

Vu le règlement grand-ducal modifié du 22 septembre 1992 déterminant les modalités des concours de recrutement du personnel enseignant de l'enseignement postprimaire, notamment l'article 7 ;

Arrête :

Article unique : En mathématiques, le concours de recrutement comporte les épreuves de classement suivantes :

Trois épreuves écrites :

a) La première épreuve, d'une durée de trois heures, porte sur un ou plusieurs thème(s) tiré(s) du domaine de l'analyse.

b) La seconde épreuve, d'une durée de trois heures, porte sur un ou plusieurs thème(s) du domaine de la géométrie.

c) La troisième épreuve, d'une durée de trois heures, porte sur un ou plusieurs thème(s) tiré(s) du domaine de l'algèbre ou des probabilités.

Les épreuves sont à rédiger dans la langue dans laquelle les questions ont été posées, c'est-à-dire en français respectivement en allemand. Elles sont dotées chacune du coefficient 1.

33, Rives de Clausen
L-2165 Luxembourg
Tél. (+352) 247-85100
Fax (+352) 247-85113
info@men.lu
www.men.lu
www.gouvernement.lu
www.luxembourg.lu

Une épreuve orale :

L'épreuve, d'une durée d'une heure pour la préparation et d'une demi-heure pour l'exposé oral, porte sur un thème tiré du domaine de l'analyse, de la géométrie, de l'algèbre ou des probabilités.

La langue à utiliser est le français. L'épreuve est dotée du coefficient 1.

Les thèmes mathématiques sur lesquels portent les épreuves écrites et l'épreuve orale sont des thèmes susceptibles de figurer au programme de l'enseignement secondaire.

Pendant les épreuves écrites et lors de la préparation de l'épreuve orale, les candidats sont autorisés à consulter les manuels de mathématiques prescrits par « Horaires et Programmes ».

À titre d'exception, des manuels analogues, approuvés préalablement par le président du jury, peuvent être utilisés.

Luxembourg, le 08 NOV. 2021

Le Ministre de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse,

Claude MEISCH

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHEMATIQUES

PARTIE I : ANALYSE

1. Limite et continuité d'une fonction

Enoncés usuels sur les limites.
Extensions sur les limites
Image d'un intervalle par une fonction continue, application à la résolution d'équations, racine $n^{\text{ième}}$ d'un réel.
Prolongement par continuité.

2. Dérivabilité

Nombre dérivé, interprétation géométrique de ce nombre. Fonction dérivée. Opérations algébriques. Dérivées successives. Dérivées d'une fonction composée, d'une fonction réciproque. Application réciproque d'une fonction dérivable strictement monotone. Existence, monotonie, continuité, dérivabilité. Application du calcul des dérivées.

3. Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis

Enoncés usuels et applications.

4. Etude des variations des fonctions numériques

Réduction de l'ensemble d'étude d'une fonction (parité, périodicité). Sens de variation, points remarquables, extrema, point d'inflexion. Branches paraboliques et asymptotes. Position de la courbe représentative d'une fonction par rapport aux asymptotes, tangentes et sécantes. Applications à la résolution d'équations et d'inéquations (méthode graphique).

5. Fonctions logarithme népérien et exponentielle de base e, de base a (a > 0)

Définitions, propriétés et calculs. Exemples.

6. Fonction puissance $x \to x^{\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

Définitions, propriétés et calculs. Exemples.

7. Fonctions cyclométriques

Définitions, propriétés et calculs. Exemples.

8. Croissance comparée des fonctions logarithme, exponentielle et puissance au voisinage de + ∞

9. Primitives d'une fonction

Définitions et propriétés. Exemples

10. Calculs d'intégrales

Changement de variable, intégration par parties.

11. Applications du calcul intégral

Calcul d'aires. Calcul de volumes.

PARTIE II : GEOMETRIE

GEOMETRIE PLANE

1. Angles

Angles géométriques, angles orientés, angles au centre et angles inscrits dans un cercle

2. Barycentres

3. Produit scalaire

Définition, propriétés, orthogonalité de vecteurs, norme d'un vecteur, expression analytique dans une base orthonormée, distance d'un point à une droite, angles dans un triangle quelconque.

4. Isométries et homothéties

Définitions, propriétés, invariants, expressions analytiques, composées de transformations, image d'un ensemble de points, représentations complexes, cas d'isométrie de triangles, triangles semblables.

5. Coniques

Définitions, propriétés géométriques, formes réduites, tangentes, constructions.

6. Lieux géométriques

GEOMETRIE DE L'ESPACE

7. Droites, plans et sphères

Définitions, positions relatives, équations cartésiennes et représentations paramétriques

8. Produit scalaire

Définition, propriétés, orthogonalité de vecteurs, norme d'un vecteur, expression analytique dans une base orthonormée, distance d'un point à une droite ou à un plan, distance entre deux droites, angle de deux vecteurs.

9. Produit vectoriel, produit mixte

Définitions, propriétés, expressions analytiques, applications.

PARTIE III : ALGEBRE ET PROBABILITES

1. Dénombrements et probabilités

Arrangements (sans et avec répétitions), permutations (sans et avec répétitions), combinaisons (sans et avec répétitions).
Formule du binôme de Newton.
Probabilité dans le cas d'équiprobabilité sur un ensemble fini d'épreuves. Probabilité conditionnelle. Événements dépendants et indépendants.
Variables aléatoires. Loi de probabilité. Espérance mathématique et écart-type.
Loi binomiale.

2. Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$

3. Nombres complexes

Notation algébrique, trigonométrique, exponentielle.
Racines $n^{\text{ièmes}}$, équations dans $\mathbb{C}$.
Etude de transformations du plan complexe de la forme $z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$, où *a*, *b*, *c* et *d* sont des nombres complexes.
Géométrie dans le plan de Gauss

4. Suites

Définitions, notations, propriétés, opérations, sens de variation, convergence.
Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques.

5. Trigonométrie

Relations métriques dans un triangle quelconque, définitions des fonctions trigonométriques, formules fondamentales, équations et inéquations trigonométriques.

MATÉRIEL AUTORISÉ

Les manuels de l'enseignement secondaire actuellement et antérieurement au programme au Luxembourg.
Des manuels de l'enseignement secondaire d'éditeurs des pays voisins.
Des formulaires imprimés ou manuscrits.
Une calculatrice non programmable

Sont interdits des cours manuscrits, des corrigés d'exercices en-dehors des manuels, des corrigés d'examens et des recueils d'exercices corrigés.

Exemples d’épreuves

Concours de recrutement en mathématiques
Épreuve d'analyse

Mardi, le 30 janvier 2018
de 15h00 à 18h00

Question 1 (6 points)

(a) Résolvez l'équation $x^{|x-1|} = \sqrt{x}^{\frac{1}{x}}$

(b) Calculez l'intégrale $\displaystyle\int_0^{-1+e^{\frac{\pi}{2}}} (1+x)^2 \sin\left[\ln(1+x)\right] \mathrm{d}x$

(c) On donne les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = e^{2x}$.
Tracez les courbes représentatives C_f et C_g des fonctions f et g. (RON; unité 1cm)
Déterminez le volume du solide obtenu en faisant tourner la surface fermée délimitée par C_f, C_g et la droite d d'équation $x = 1$ autour de l'axe (Oy).

Question 2 (7 points)

On donne la famille de fonctions f_a définies sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = (x-1)\sqrt[3]{ax+1}$ où a est un paramètre réel.

(a) Etudiez la dérivabilité de f_a et précisez le domaine de dérivabilité en fonction de la valeur de a.
Pour les valeurs éventuelles en lesquelles f_a n'est pas dérivable, donnez l'interprétation graphique des résultats trouvés.

(b) Pour $a = -4$, calculez l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de f_a, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Question 3 (7 points)

$\boxed{\text{A}}$ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{0; 2\}$ par $g(x) = x \ln|x| - (x-2)\ln|x-2|$.
Etudiez les variations de la fonction g et déduisez-en le signe de $g(x)$.

$\boxed{\text{B}}$ Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln|x-2|}{\ln|x|}$.

(a) Déterminez le domaine de définition de f. Calculez les limites aux bornes du domaine et précisez les équations des asymptotes éventuelles.

(b) Déterminez la dérivée de f et établissez le tableau de variation de f.

(c) Esquissez la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (unité: 1 cm).

Concours de recrutement en mathématiques
Épreuve de géométrie
Mardi, le 6 février 2018
15h00-18h00

I.

On considère un cercle Γ de centre O et de rayon r dans le plan.
Soit [AB] un diamètre de ce cercle.
Pour tout point M du plan, on définit $P_\Gamma(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

a) Montrer que pour tout point M du plan : $P_\Gamma(M) = MO^2 - r^2$
b) En déduire le lien entre le signe de $P_\Gamma(M)$ et la position du point M par rapport au cercle Γ.
c) Déterminer en fonction des valeurs du paramètre réel k l'ensemble des points du plan M tels que $P_\Gamma(M) = k$.
d) Soit Γ' un cercle de centre O' et de rayon r' avec $r \neq r' et\ O \neq O'$. I est le milieu de [O O'].
Démontrer l'ensemble des points M tels que $P_\Gamma(M) = P_{\Gamma'}(M)$ est une droite. On pourra d'abord montrer que $\left(\overrightarrow{MO}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MO'}\right)^2 = 2\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{IM}$

(7 points)

II.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soient d et Δ les droites passant respectivement par les points A et B et dont des vecteurs directeurs respectifs sont $\vec{u}\ et\ \vec{v}$

a) Démontrer que les droites non parallèles d et Δ sont sécantes si et seulement si $det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 0$.
b) m étant un paramètre réel, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m-1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 2-m \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, A(2,1,1) et B(-1,1,-1).
   i. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les deux droites sont parallèles.
   ii. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les deux droites sont sécantes

(6 points)

III.

On considère le triangle équilatéral ABC inscrit dans le cercle Γ dans le plan orienté de sorte que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv +\frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$.
Soit M un point de Γ, distinct de A et de C, situé sur l'arc AC, qui ne comprend pas le point B.
Soit I le point de [MB] tel que IM=MA.

a) Faire une figure.
b) Montrer que le triangle IAM est équilatéral.
c) Soit r la rotation de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{3}$.
Déterminer les images de A, de B et de I par r et en déduire que MA+MC=MB.

(4 points)

IV.

Soient A et B 2 points distincts du plan et α un réel strictement positif. I est le barycentre de $A(1)\ et\ B(\alpha)$ et J celui de $A(1)\ et\ B(-\alpha)$.
Déterminer l'ensemble des points M tels que $\frac{MA}{MB} = \alpha$ en fonction des valeurs de α.

(3 points)

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE D'ALGÈBRE-PROBABILITÉS

jeudi, le 8 février 2018

15H00 – 18H00

I. 1) Un ministre est contacté par téléphone et dispose d'un répondeur.
Quand il est présent, il branche son répondeur une fois sur trois.
Quand il est absent, il branche son répondeur systématiquement.
Quand un citoyen téléphone, il a 4 chances sur 5 d'obtenir le répondeur.

a) Calculer la probabilité que le ministre soit dans son bureau à un moment quelconque de la journée.

b) Un citoyen téléphone et tombe sur le répondeur. Calculer la probabilité que le ministre soit présent.

2) Une urne contient 6 boules rouges et n boules bleues, $n \in \mathbb{N}$. On tire simultanément deux boules de l'urne.
Combien doit-on avoir de boules bleues dans l'urne pour que la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes soit supérieure à 0,5 ?

(6 points)

II. Soit l'équation $m\cos x - (m+1)\sin x = m$, où m est un paramètre réel.
Déterminer la/les valeur(s) du paramètre réel m tel que l'équation admette deux solutions dont la différence est $\frac{\pi}{2}$.

(4 points)

III. Dans le plan complexe on note f l'application qui à tout point M d'affixe z non nulle, noté M(z), associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{\bar{z}}$.

1) Montrer que les points O, M et M' sont alignés.
2) Déterminer l'ensemble Γ des points invariants par f.
3) Soient A(−1), B(i), E le milieu du segment [AB] et E' l'image de E par f.
Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB] et montrer que E' est un point de ce cercle.
4) Pour tout point M d'affixe z de la droite (AB) on se propose de construire son image M' d'affixe z' par f.
   a) Déterminer une équation de la droite (AB).
   b) Poser $k = \mathrm{OM}^2$, $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec x, y, x' et y' réels.
   Exprimer k en fonction de x et montrer que M' $\in \mathcal{C}$.
   c) Donner alors une construction géométrique du point M' à partir du point M.

(6 points)

IV. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 1$
2) La suite (v_n) est définie par $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$.
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser sa limite.
3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

(4 points)

Epreuve orale 2018

Concours de Recrutement en mathématiques

I. Introduire la dérivabilité d'une fonction f en un point d'abscisse a.
Préciser les différents cas possibles et interpréter graphiquement.

II.

1. Soit (P) le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1. Soient les points A(1;0) et A'(-1;0).

   Par tout point H du segment $[A\ A']$, distinct de A et de A', on mène la perpendiculaire Δ à la droite (AA'). La droite Δ coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en M et M'. Soit x l'abscisse du point H.

   Calculer l'aire du triangle (AMM') en fonction de x.

2. Soit f la fonction numérique définie sur $[-1; 1]$ par:
   $f(x)= (1-x)\cdot\sqrt{1-x^2}$.

   Soit (C_f) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal où l'unité de longueur est 4 cm.

   a) Etudier la dérivabilité de f en -1 et en +1.
   b) En déduire les demi-tangentes à la courbe (C_f) aux points d'abscisses -1 et +1.
   c) Dresser le tableau de variation de f; on y précisera f(0).
   d) Tracer la courbe (C_f).

3. Démontrer que le triangle (AMM') d'aire maximale est équilatéral.

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE ORALE
2018

1) Définir les notions suivantes : fonction, application, injection, surjection, bijection.

2) On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x-2}{4x+1}$.

   a) Déterminer des ensembles A et B « aussi grands que possible » tels que la restriction de f à l'ensemble A, notée $\bar{f}$, soit une bijection de A vers B.

   b) Déterminer une expression de la réciproque $\bar{f}^{-1}$ de la fonction $\bar{f}$.

3) On donne la fonction g définie par $g(x) = x^2 - x - 1$.

   a) Déterminer des ensembles A et B « aussi grands que possible » tels que la restriction de g à l'ensemble A, notée $\bar{g}$, soit une bijection de A vers B.

   b) Déterminer une expression de la réciproque $\bar{g}^{-1}$ de la fonction $\bar{g}$.

   c) Faire la représentation graphique des fonctions $\bar{g}$ et $\bar{g}^{-1}$.

4) On donne la fonction h définie par $h(x) = 3 - \sqrt{x^2 - 4}$.

   a) Déterminer des ensembles A et B « aussi grands que possible » tels que la restriction de h à l'ensemble A, notée $\bar{h}$, soit une bijection de A vers B.

   b) Déterminer une expression de la réciproque $\bar{h}^{-1}$ de la fonction $\bar{h}$.

   c) Compléter : $\forall x \in \cdots : \bar{h} \circ \bar{h}^{-1}(x) = \cdots$

   $\forall x \in \cdots : \bar{h}^{-1} \circ \bar{h}(x) = \cdots$